Απόδειξη

Εφόσον $f_n \to f$ ομ/μα στο A. Επομένως $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in A$. Έστω $(x_m) \subseteq A$ με $x_m \xrightarrow[m]{} \gamma$

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ τότε για οποιοδήποτε $m, k \in \mathbb{N}$ έχουμε τα εξής:

$$|f(x_m)-f(x_k)| \leq |f(x_m)-f_n(x_m)+f_n(x_m)-f_n(x_k)+f_n(x_k)-f(x_k)| \leq$$

$$\leq |f(x_m)-f_n(x_m)| + |f_n(x_m)-f_n(x_k)| + |f_n(x_k)-f(x_k)| <$$

$$< \varepsilon + |f_n(x_m)-f_n(x_k)| + \varepsilon = \boxed{2\varepsilon + |f_n(x_m)-f_n(x_k)|} \quad (1)$$

Όμως, για $n \in \mathbb{N}$, η $(f_n(x_m))_m$ είναι μια ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Εφόσον, $\lim\limits_{x\to\gamma} f_n(x) = C_n$ και $x_m \to \gamma$, έπεται ότι $\lim\limits_{m} f_n(x_m) = C_n$.

Δηλαδή $(f_n(x_m))_m$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι και βασική. Άρα $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. (2) $|f_n(x_m)-f_n(x_k)|<\varepsilon$ $\forall m,k \geq m_0$.

Άρα, από (1) λόγω της (2) έχουμε:

$|f(x_n)-f(x_k)| < 2\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon$ $\forall m,k \geq m_0$

Άρα η $(f(x_m))_m$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και εφόσον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης, έπεται ότι η $(f(x_m))_m$ συγκλίνουσα.

$\lim\limits_{m} f(x_m) = \ell \in \mathbb{R}$. Οπότε $\exists m_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\boxed{|f(x_m)-\ell|<\varepsilon, \ \forall m \geq m_1}$ (3)

Επίσης εφόσον $\lim\limits_{x\to\gamma} f_n(x) = C_n$ και $x_m \to \gamma$ έχουμε

$\lim\limits_{m} f_n(x_m) = C_n$ $\forall n$, $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\boxed{|f_n(x_m)-C_n|<\varepsilon \ \forall m \geq m_2}$ (4)

Έστω $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$. Εφόσον $f_n \to f$ ομ/φα στο A, για $n \geq n_0$
$|c_n - \ell| = |c_n - f_n(x_{m_3}) + f_n(x_{m_3}) - f(x_{m_3}) + f(x_{m_3})| \leq$
$\leq |c_n - f_n(x_{m_3})| + |f_n(x_{m_3}) - f(x_{m_3})| + |f(x_{m_3}) - \ell|$ (5)

Από τις (3), (4) έχουμε $|c_n - \ell| < 3\varepsilon \ \forall n \geq n_0$ (6)
Άρα το όριο της (c_n) είναι το ℓ. Είδαμε επίσης ότι ℓ είναι και το όριο της $(f(x_m))$.
Θέλουμε ν.δ.ο. $\lim_{x \to \gamma} f(x)$ είναι ίδιο με το όριο της (c_n).

Έστω $(y_m) \subseteq A$ με $y_m \to \gamma$. Όπως και πριν αποδεικνύεται ότι $(f(y_m))_m$ είναι βασική και άρα το $\lim_m f(y_m)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$

Έστω $\lim_m f(y_m) = \ell^*$. Θ.ν.δ.ο. $\ell = \ell^*$.

$\exists m_1'$ τ.ω. $|f(y_m) - \ell^*| < \varepsilon \quad \forall m \geq m_1'$
$\exists m_2'$ τ.ω. $|f_n(y_m) - c_n| < \varepsilon \quad \forall m \geq m_2'$
Οπότε για $m_3' = \max\{m_1', m_2'\}$ για $n \geq n_0$ έχουμε
$|c_n - \ell^*| \leq 3\varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ (7) (όπως πριν αποδεικνύεται)
Εάν υποθέσουμε ότι $\ell \neq \ell^*$ και $d = \frac{1}{6}|\ell - \ell^*|$

Έστω, επίσης, $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < d$, τότε θα υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι σχέσεις (6), (7). Οπότε
$|\ell - \ell^*| \leq |\ell - c_{n_0} + c_{n_0} - \ell^*| \overset{(6)}{<} 3\varepsilon + 3\varepsilon = 6\varepsilon < \cancel{6} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} |\ell - \ell^*|$ Άτοπο.

Επομένως, το $\lim_{x \to \gamma} f(x)$ υπάρχει και μάλιστα $\lim_{x \to \gamma} f(x) = \ell = \lim_n c_n$

Πόρισμα
Έστω $(a_{nm}) \subseteq \mathbb{R}$ μια ακολουθία για την οποία ισχύει

$\lim_n a_{nm}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα $\lim_n a_{nm} = b_m$ (ομοιόμορφα ως προς m). Αν $\forall n \in \mathbb{N}$ το $\lim_m a_{nm}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και

$\lim_m a_{nm} \leq c_n$, τότε $\lim_m b_m$ και $\lim_n c_n$ υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους.

Δηλαδή, $\lim_n \lim_m a_{nm} = \lim_m \lim_n a_{nm}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $(a_{nm}) \subseteq \mathbb{R}$ μια ακολουθία δύο δεικτών τ.ω. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ να ισχύουν τα εξής:

$a_{nm} \leq a_{n(m+1)}$ και $a_{nm} \leq a_{(n+1)m}$ τότε ισχύει

$\lim_n \lim_m a_{nm} = \lim_m \lim_n a_{nm}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(a_1(m), a_2(m), \ldots, a_n(m), \ldots)$

Η σχέση $a_{nm} \leq a_{(n+1)m}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εξασφαλίζει ότι η $(a_{nm})_n$ είναι αύξουσα. Όμοια η σχέση $a_{nm} \leq a_{n(m+1)}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ εξασφαλίζει ότι η $(a_{nm})_m$ είναι αύξουσα. Επομένως, τα όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}^*$ $\lim_n a_{nm} = b_m$ και $\lim_m a_{nm} = c_n$

Όμως, $\forall m \in \mathbb{N}$ έχουμε $a_{nm} \leq a_{n(m+1)}$. Οπότε $\lim_n a_{nm} \leq \lim_n a_{n(m+1)}$ δηλαδή $b_m \leq b_{m+1}$.

Δηλαδή $(b_m)_m$ είναι αύξουσα ακολουθία, συνεπώς το όριο της $(b_m)_m$ υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$ και έστω $\lim_m b_m = b \in \mathbb{R}^*$

Όμοια, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $a_{nm} \leq a_{(n+1)m}$, οπότε $\overset{c_n}{\overset{\shortparallel}{\lim_m}} a_{nm} \leq$

$\leq \lim_m a_{(n+1)m} = c_{n+1}$. Άρα και η $(c_n)_n$ είναι αύξουσα ακολουθία

άρα το όριό της υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$ και $\lim_n c_n = c$

$a_{nm} \leq \sup\{a_{nm} : n \in \mathbb{N}\} = \lim_n a_{nm} = b_m$ (*)

Όμοια, εφόσον $(b_m)_m$ είναι αύξουσα $b_m \leq \sup\{b_m : m \in \mathbb{N}\} =$

$= \lim_m b_m = b$ (*1)

Από (*) και (*1) έχουμε $a_{nm} \le b_m \le b$, $\forall m,n \in \mathbb{N}$

Οπότε, από τη σχέση αυτή παίρνοντας όριο ως προς m έχουμε $c_n = \lim\limits_m a_{nm} \le b$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα $c_n \le b$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Οπότε, $c = \lim\limits_n c_n \le b$. Άρα $\boxed{c \le b}$ (Δ)

Επίσης $\forall m,n \in \mathbb{N}$ $a_{nm} \le \sup\{a_{nm} : m \in \mathbb{N}\} = \lim\limits_m a_{nm} = c_n$ (1)

αλλά (c_n) είναι αύξουσα, οπότε $c_n \le \sup\{c_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim\limits_n c_n = c$ (2)

Άρα, $c_n \le c$ και από τις (1) κ' (2) έχουμε $a_{nm} \le c$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$.

$\lim\limits_n a_{nm} \le c$ και $\lim\limits_n a_{nm} = b_m$. Άρα, τελικά $b_m \le c$.

Και $b = \lim\limits_m b_m \le c$. Άρα $\boxed{b \le c}$ (Δ1)

Από (Δ), (Δ1) έχουμε $c = b$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εξετάσετε, εάν ισχύουν οι προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης ώστε να γίνει εναλλαγή ορίων για την ακολουθία δύο δεικτών: $a_{nm} = 1 - e^{-nm}$

Εάν $n \in \mathbb{N}$ τότε $n < n+1 \Rightarrow nm < (n+1)m \Rightarrow -nm > -(n+1)m \Rightarrow$

$e^{-nm} > e^{-(n+1)m} \Rightarrow -e^{-nm} < -e^{-(n+1)m} \Rightarrow a_{nm} < a_{(n+1)m}$

Ομοίως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ $m < m+1 \Rightarrow nm < n(m+1) \Rightarrow -nm > -(m+1)n$

$\Rightarrow e^{-nm} > e^{-(m+1)n} \Rightarrow -e^{-nm} < -e^{-n(m+1)} \Rightarrow a_{nm} < a_{n(m+1)}$

Άρα $(a_{nm})_m$ και $(a_{nm})_n$ αύξουσες. Επομένως, πληρούνται οι προϋποθέσεις της προηγ. Πρότασης και ισχύει

$$\lim_n \lim_m a_{nm} = 1 = \lim_m \lim_n a_{mn}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να εξετάσετε εάν εφαρμόζεται κάποιο από τα παραπάνω κριτήρια εναλλαγής ορίων στην ακολουθία $a_{nm} = \left(1-\frac{1}{m}\right)^n$ $n, m \in \mathbb{N}$

$\lim_n a_{nm} = \lim_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n = 0$ (διότι $\left(1-\frac{1}{m}\right) < 1$)

Συνεπώς, $\lim_m \lim_n a_{nm} = \lim_m 0 = 0$

$\lim_m a_{nm} = \lim_m \left(1-\frac{1}{m}\right)^n = 1$

Άρα $\lim_n \lim_m a_{nm} = \lim_n 1 = 1$. Επομένως, $\lim_n \lim_m a_{nm} \neq \lim_m \lim_n a_{nm}$

2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ

Η ακολουθία $(a_{nm})_m$ είναι αύξουσα.

Όμως, εφόσον εάν $b<1$ ισχύει $b^{n+1} < b^n$, η ακολουθία $(a_{nm})_n$ δεν είναι αύξουσα.

1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ

$\lim_n a_{nm} = \lim_n \left(1-\frac{1}{m}\right)^n = 0 = a^*(m)$. Τότε $|a_{nm} - a^*(m)| < \varepsilon$

$\left|\left(1-\frac{1}{m}\right)^n - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \left(1-\frac{1}{m}\right)^n < \varepsilon \Rightarrow$ $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < 1$

$n > \frac{\log \varepsilon}{\log(1-1/m)}$ και $N_\varepsilon(m) = \left[\frac{\log \varepsilon}{\log(1-1/m)}\right] + 1$

Αλλά $\lim_m \frac{1}{m} = 0$, άρα $\sup\{N_\varepsilon(m) : m \in \mathbb{N}\} = +\infty$

Άρα η ακολουθία δεν είναι ομοιόμορφη ως προς m

Όμοια αποδεικνύεται η ακολουθία της $(a_{nm})_n$ δεν είναι ομοιόμορφη ως προς n.

Επομένως, δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 2.

ΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΟΝ $F(A,\mathbb{R})$

Θεωρούμε την απεικόνιση $\rho_u: F(A,\mathbb{R}) \times F(A,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\rho_u(f,g) = \min\{1, \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|\} \leq 1$$

Η ρ_u είναι μια μετρική στον $F(A,\mathbb{R})$ διότι

1) $\rho_u(f,g) = \min\{1, \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|\} \geq 0$

2) $\rho_u(f,g) = 0 \Rightarrow \min\{\sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|\} = 0 \Rightarrow \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)| = 0 \Rightarrow$

$f(x)-g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = f(x) \ \forall x\in A$.

Αντίστροφα: $f=g$ στο A τότε $f(x)=g(x) \ \forall x\in A \Rightarrow |f(x)-g(x)|=0 \ \forall x\in A$

$\Rightarrow \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)| = 0 \Rightarrow \min\{1, \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|\} = 0 \Rightarrow \rho_u(f,g) = 0$

3) $\rho_u(f,g) = \rho_u(g,f)$

4) Εξετάζουμε εάν $\forall f,g,h \in F(A,\mathbb{R})$ $\rho_u(f,g) \leq \rho_u(f,h) + \rho_u(h,g)$

Πράγματι, $\forall x\in A$ έχουμε $|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)| \leq$

$\sup_{x\in A} |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)| \leq \sup_{x\in A} |f(x)-h(x)| + \sup_{x\in A} |h(x)-g(x)|$

Συνεπώς, $\sup_{x\in A} |f(x)-g(x)| \leq \sup_{x\in A} |f(x)-h(x)| + \sup_{x\in A} |h(x)-g(x)|$ (*)

Έστω $a = \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|$, $b = \sup_{x\in A} |f(x)-h(x)|$, $\gamma = \sup_{x\in A} |h(x)-g(x)|$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) $a, b, \gamma < 1$.

Τότε $\min\{1, a\} = a \overset{(*)}{\leq} b + \gamma = \min\{1, b\} + \min\{1, \gamma\}$

ii) $a, b < 1$ και $\gamma > 1$.

Τότε $\min\{1, a\} = a \leq b + \gamma \leq \min\{1, b\} + \gamma$

Άρα $\min\{1, a\} - \min\{1, b\} \leq \gamma$ (1)
Επίσης $\min\{1, a\} - \min\{1, b\} \leq 1$ (2)
Από τις (1), (2) $\min\{1, a\} - \min\{1, b\} \leq \min\{1, \gamma\}$.
Άρα $\min\{1, a\} \leq \min\{1, b\} + \min\{1, \gamma\}$

iii) $a < 1$ και $b, \gamma > 1$

Τότε $\min\{1, a\} = a \overset{(*)}{\leq} b + \gamma$
Επιπλέον $\min\{1, b\} = 1$ και $\min\{1, \gamma\} = 1$
Οπότε, $\min\{1, a\} = a < 1 < 2 = \min\{1, b\} + \min\{1, \gamma\}$

iv) Εάν $a, b, \gamma > 1$

Τότε $\min\{1, a\} = 1 < 2 = \min\{1, b\} + \min\{1, \gamma\}$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε:

$\min\{1, a\} \leq \min\{1, b\} + \min\{1, \gamma\}$ δηλ.

$\rho_u(f, g) \leq \rho_u(f, h) + \rho_u(h, g)$

Οπότε ρ_u μετρική στο $F(A, \mathbb{R})$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω $(f_n) \subseteq F(A, \mathbb{R})$ και $f \in F(A, \mathbb{R})$ τότε:

$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $A \iff \rho_u(f_n, f) \to 0$

Αποδειξη

$(\Leftarrow)$ Εστω $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Τότε:

$(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ έχουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon < 1 \quad \forall n \geq n_0 \ \forall x \in A$.

Συνεπώς, $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon < 1$

$\min\{1, \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|\} = \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon < 1, \ \forall n \geq n_0$

Άρα $\rho_u(f_n, f) \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$. Οπότε $(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$:
$\rho_u(f_n, f) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$. $\lim\limits_{n} \rho_u(f_n, f) = 0$

$(\Rightarrow)$ Εστω $\lim\limits_{n} \rho_u(f_n, f) = 0$. Τότε

$(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$: $|\rho_u(f_n, f) - 0| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$
$(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$: $\rho_u(f_n, f) < \varepsilon < 1 \ \forall n \geq n_0$
Άρα $(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$: $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0, \ \forall x \in A$
$\Rightarrow f_n \to f$ ομοιόμορφα στο σύνολο A

Εφαρμογη

Εστω $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $x \in (0,1)$. Εφόσον, $0<x<1$ έχουμε

$\lim\limits_{n} x^n = 0$. Άρα $f_n \to 0$ κ.σ. στο $A = (0,1)$.

Όμως, $\rho_u(f_n, 0) = \min\left\{1, \sup\limits_{x\in A} \dfrac{x^n}{1+x^n}\right\} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

Επομένως, η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f=0$ στο $(0,1)$